$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ بما أن A مؤثر خطي محدود إذن:

$$\|Ax_n - Ax_m\| = \|A(x_n - x_m)\| \le \|A\|\,\|x_n - x_m\| \longrightarrow 0$$

أي أن المتتالية $\{A x_n\}$ هي متتالية كوشي في الفضاء E_2. وبما أن الفضاء E_2 تام عندئذٍ المتتالية $\{A x_n\}$ تتقارب من عنصر في E_2 وليكن y أي أن:

$$\lim_{n\to\infty} A x_n = y$$

وبما أن A مغلق، وبحسب خاصة المؤثر الخطي المغلق يكون $x \in D(A)$ كما أن $Ax = y$. لذلك فإن $D(A)$ مغلقة ذلك كون العنصر x اختيارياً من $\overline{D(A)}$.

(٥-١٠) تمارين محلولة :

تمرين محلول (١) :

ليكن P فضاء جزئياً خطياً من $C[0,1]$ (سواء أكانت التوابع حقيقية أم عقدية) والمؤلف من جميع كثيرات الحدود إذا كان $T : P \longrightarrow P$ تحويلاً خطياً معرفاً بالعلاقة:

$$T(p) = p'$$

حيث p' هو مشتق p ، عندئذٍ T تابع غير مستمر.

الحل:

بفرض أن $P_n \in P$ والمعرف بالشكل $P_n(t) = t^n$ عندئذٍ:

$$\|P_n\| = \sup\{|P_n(t)| : t \in [0,1]\} = 1$$

$$\|T(P_n)\| = \|P_n'\| = \sup\{|P_n'(t)| : t \in [0,1]\}$$

$$= \sup\{|n t^{n-1}| : t \in [0,1]\} = n$$

أي أنه لا يوجد $k \ge 0$ بحيث إن: $\|T(p)\| \le k\|p\|$ وذلك من أجل أي $p \in P$

أي أن T غير مستمر. لأنه غير محدود.

تمرين محلول (٢) :

بفرض X فضاء منظماً منتهي البعد ، Y فضاء خطي منظم وبفرض: $T : X \longrightarrow Y$ مؤثراً خطياً ، عندئذٍ T مستمر.

الحل:

للإثبات نعرف نظيماً على X. ليكن $\|\cdot\|_1 : X \longrightarrow \mathbb{R}$ المعرف بالشكل:

$$\|.\|_1 = \|x\| + \|T(x)\| \quad ; T(x) \in Y$$

إن $\|\cdot\|_1$ يعرف نظيم على X وذلك لأنه:

من أجل أي $X \ni x, y$ و $\lambda \in \mathcal{F}$.

(i) $\|x\|_1 = \|x\| + \|T(x)\| \geq 0$

(ii) إذا كان $\|x\|_1 = 0$ عندئذٍ $\|x\| = \|T(x)\| = 0$ وبالتالي $x = 0$. وبالعكس إذا كانت $x = 0$ عندئذٍ $\|x\| = \|T(x)\| = 0$ أي أن $\|x\|_1 = 0$.

(iii)

$$\|\lambda x\|_1 = \|\lambda x\| + \|T(\lambda x)\| = |\lambda|.\|x\| + |\lambda|.\|T(x)\|$$
$$|\lambda|(\|x\| + \|T(x)\|) = |\lambda|.\|x\|_1$$

(iv)

$$\|x+y\|_1 = \|x+y\| + \|T(x+y)\| = \|x+y\| + \|T(x)+T(y)\|$$
$$\leq \|x\| + \|y\| + \|T(x)\| + \|T(y)\| = \|x\|_1 + \|y\|_1$$

وبالتالي $\|\cdot\|_1$ نظيم على X. بما أن X فضاء منتهي البعد ، فإن النظيمين $\|\cdot\|, \|\cdot\|_1$ متكافئين عندئذٍ يوجد $k > 0$ بحيث إن $\|x\|_1 \leq k\|x\|$ وذلك من أجل أي $x \in X$. $\|T(x)\| \leq \|x\|_1 \leq k\|x\|$ وذلك من أجل أي $x \in X$ وبالتالي فإن T محدود.

تمرين محلول (٣) :

بفرض أن X فضاء باناخ . إذا كان $T \in B(X)$ مؤثراً بحيث إن $\|T\| < 1$ عندئذٍ $I - T$ قابل للقلب ومعكوسه يعطى بالعلاقة: $(I-T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n$

الحل:

بما أن X فضاء باناخ فإنه $B(x)$ فضاء باناخ. وبما أن $\|T\| < 1$ فإن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \|T\|^n$ متقاربة، و $\|T^n\| \leq \|T\|^n$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$، وبالتالي فإن المتسلسلة

$\sum_{n=0}^{\infty}\|T^n\|$ متقاربة ، لذلك $\sum_{n=0}^{\infty}T^n$ متقاربة.

بفرض أن $S=\sum_{n=0}^{\infty}T^n$ و $S_k=\sum_{n=0}^{k}T^n$. عندئذٍ المتتالية $\{S_k\}$ متقاربة من S في الفضاء $B(x)$.

$$\|(I-T)S_k-I\|=\|I-T^{k+1}-1\|=\|-T^{k+1}\|\le\|T\|^{k+1}$$

وبما أن $\|T\|<1$ ينتج أن $\lim_{k\to\infty}(I-T)S_k=I$ لذلك:

$$(I-T)S=(I-T)\lim_{k\to\infty}S_k=\lim_{k\to\infty}(I-T)S_k=I$$

وبشكل مشابه يتم برهان أن $S(I-T)=I$ وبالتالي فإن $I-T$ قابل للقلب ومعكوسه $S=(I-T)^{-1}$.

تمرين محلول (٤) :

إذا كان X فضاءً خطياً منظماً و $T\in B(X)$ له معكوس. عندئذٍ :

$$\|T(x)\|\ge\|T^{-1}\|^{-1}\|x\| \;;\; \forall x\in X$$

الحل:

من أجل كل $x\in X$ فإن $\|x\|=\|T^{-1}(T(x))\|\le\|T^{-1}\|.\|T(x)\|$ وبالتالي:

$$\|T(x)\|\ge\|T^{-1}\|^{-1}\|x\|$$

تمرين محلول (٥) :

إذا كان X فضاء باناخ و بفرض أن $T\in B(X)$ يحقق العلاقة :

$$\|T(x)\|\ge\alpha\|x\| \;;\; \forall x\in X\,,\,\alpha>0$$

عندئذٍ $R(T)$ مدى المؤثر T مجموعة مغلقة.

الحل:

بفرض أن $\{y_n\}$ متتالية من $R(T)$ متقاربة من y بما أن $y_n\in R(T)$ فإنه يوجد $x_n\in X$ بحيث إن $T(x_n)=y_n$ وبما أن $\{y_n\}$ متقاربة فهي متتالية كوشي عندئذ:

$$\|y_n-y_m\|=\|T(x_n)-T(x_m)\|=\|T(x_n-x_m)\|\ge\alpha\|x_n-x_m\|$$

وذلك من أجل كل $m, n \in \mathbb{N}$، وبالتالي فإن المتتالية $\{x_n\}$ متتالية كوشي وبما أن X فضاء تام عندئذٍ يوجد $x \in X$ بحيث إن $\{x_n\}$ متقاربة من x .

وبما أن T مستمر فإن:

$$T(x) = \lim_{n\to\infty} T(x_n) = \lim_{n\to\infty} y_n = y$$

وبالتالي فإن $R(T) \ni y = T(x)$ أي أن $R(T)$ مجموعة مغلقة.

تمرين محلول (٦) :

(a) إذا كان $\ell_2 \ni (x_1, x_2, x_3, x_4, ...)$، أثبت أن :

$$\ell_2 \ni (0, 4x_1, x_2, 4x_3, x_4, ...)$$

(b) بفرض أن $T : \ell_2 \longrightarrow \ell_2$ مؤثر خطي معرف بالشكل:

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4, ...) = (0, 4x_1, x_2, 4x_3, x_4, ...)$$

أثبت أن T مستمر.

(c) أوجد نظيم T .

الحل:

(a) لنثبت أن $\|(0, 4x_1, x_2, 4x_3, x_4, ...)\|_{\ell_2}^2 < \infty$. إن :

$$\|(0, 4x_1, x_2, 4x_3, x_4, ...)\|_{\ell_2}^2 = 16|x_1|^2 + |x_2|^2 + 16|x_3|^2 + |x_4|^2 + ...$$

$$\le 16 \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$$

و لأن $\{x_n\} \in \ell_2$ عندئذٍ فإن $\ell_2 \ni (0, 4x_1, x_2, 4x_3, x_4, ...)$.

(b) إن T مستمر لأن:

$$\|T(\{x_n\})\|_{\ell_2}^2 = \|(0, 4x_1, x_2, 4x_3, x_4, ...)\|_{\ell_2}^2 \le 16 \|T\{x_n\}\|_{\ell_2}^2$$

(c) من الطلب (a) عندنا:

$$\|T\{x_n\}\|_{\ell_2} \le \|\{x_n\}\|_{\ell_2}$$

وبالتالي فإن: $\|T\| \le 4$.

من أجل $\|(1, 0, 0, ...)\|_{\ell_2} = 1$ فإن:

$$T\left\|(1,0,0,\ldots)\right\|_{\ell_2}=\left\|(0,4,0,\ldots)\right\|_{\ell_2}=4$$

عندئذٍ $\|T\|\geq 4$ وبالتالي فإن $\|T\|=4$.

تمرين محلول (٧) :

بفرض أن $T:\ell_2 \longrightarrow \ell_2$ مؤثر خطي محدود المعرف بالشكل:

$$T(x_1,x_2,x_3,x_4,\ldots\ldots)=(0,4x_1,x_2,4x_3,x_4,\ldots\ldots)$$

(a) أوجد T^2.

(b) أوجد $\|T^2\|$ وقارنه مع $\|T\|^2$.

الحل:

(a)

$$\begin{aligned}T^2(x_1,x_2,x_3,x_4,\ldots\ldots)&=T\left(T(x_1,x_2,x_3,x_4,\ldots\ldots)\right)\\&=T(0,4x_1,x_2,4x_3,x_4,\ldots\ldots)\\&=(0,0,4x_1,4x_2,4x_3,4x_4,\ldots\ldots)\end{aligned}$$

(b) ينتج وبالاعتماد على الطلب السابق:

$$\begin{aligned}\left\|T^2(\{x_n\})\right\|_2^2&=\left\|(0,0,4x_1,4x_2,4x_3,4x_4,\ldots\ldots)\right\|_2^2\\&=16\left\|\{x_n\}\right\|_2^2\end{aligned}$$

وبذلك فإن $\|T^2\|\leq 4$.

إن $\|(1,0,0,\ldots\ldots)\|_2=1$ و $\|T^2(1,0,0,\ldots\ldots)\|_2=\|(0,0,4,0,\ldots\ldots)\|_2=4$

وبالتالي فإن $\|T^2\|\geq 4$ أي إن $\|T^2\|=4$.

إن $\|T\|=4$ وبالتالي فإن $\|T^2\|\neq\|T\|^2$.

تمرين محلول (٨):

من أجل $k\in C[0,1]$، وبفرض أن $T_k\in B\left(L^2[0,1]\right)$ المعرف بالشكل:

$$(T_k g)(t)=k(t)\,g(t)$$

إذا كان $f\in C[0,1]$ عندئذٍ $(T_f)^*=T_{\bar{f}}$.

الحل:

بفرض أن $g,h \in L^2[0,1]$ ، ليكن $k = (T_f)^* h$. عندئذٍ $\langle T_f g, h\rangle = \langle g,h\rangle$

$$\int_0^1 f(t)g(t)\overline{h(t)}dt = \int_0^1 g(t)\overline{k(t)}dt$$

وهذه المعادلة صحيحة لأنه إذا كان $\overline{k(t)} = \overline{h(t)}f(t)$ ، فإن $k(t) = \overline{f(t)}h(t)$.

ومن وحدانية المرافق يكون $(T_f)^* h = \bar{f} h$ وبالتالي فإن:

$$(T_f)^* = T_{\bar{f}}$$

تمرين محلول (٩) :

بفرض أن $S \in B(\ell^2)$ مؤثر خطي معرف بالشكل:

$$S(x_1,x_2,x_3,.....) = (0,x_1,x_2,x_3,.....)$$

فأثبت أن:

$$S^*(y_1,y_2,y_3,.....) = (y_2,y_3,y_4,.....)$$

الحل:

بفرض أن $x = \{x_n\}$ و $y = \{y_n\} \in \ell^2$ ، ولتكن $z = \{z_n\} = S^*(y)$ عندئذٍ

وبالتالي: $(Sx,y) = (x,S^*y)$

$$((0,x_1,x_2,x_3,...),(y_1,y_2,y_3,...)) = ((x_1,x_2,x_3,...),(z_1,z_2,z_3,...))$$

أي يكون لدينا :

$$x_1\overline{y_2} + x_2\overline{y_3} + x_3\overline{y_4} + ... = x_1\overline{z_1} + x_2\overline{z_2} + x_3\overline{z_3} + ...$$

ومنه فإن : $z_1 = y_2$, $z_2 = y_3$, ... عندئذٍ المعادلة صحيحة .

من أجل كل $x_1,x_2,x_3,....$ وبما أن المرافق وحيد فإن:

$$S^*(y_1,y_2,y_3,.....) = (z_1,z_2,z_3,.....) = (y_2,y_3,y_4,.....)$$

تمرين محلول (١٠) :

بفرض K , H فضاءي هيلبرت عقديين . وليكن $T \in B(H,K)$.

(a) $(T^*)^* = T$. د مرك

(b) $\|T^*\| = \|T\|$.

(c) التابع $f : B(H,K) \longrightarrow B(H,K)$ المعرف بالشكل $f(\bar{R}) = \bar{R}^*$ مستمر.

(d) $\|T^*T\| = \|T\|^2$. درسها .

الحل:

(a) $(y,(T^*)^*x) = (T^*y,x) = \overline{(x,T^*y)} = \overline{(Tx,y)} = (y,Tx)$

وبالتالي فإن $(T^*)^*x = Tx$ وذلك من أجل كل $x \in H$ وبالتالي $(T^*)^* = T$.

(b) نعلم أن $\|T^*\| \le \|T\|$.

$$\|T\| = \|(T^*)^*\| \le \|T^*\| \le \|T\|$$

وبالتالي فإن: $\|T^*\| = \|T\|$.

(c) بفرض أن $0 < \varepsilon$ وبفرض أن $\delta = \varepsilon$ عندئذ من أجل $\|R - S\| < \delta$ فإن :

$$\|f(R) - f(S)\| = \|R^* - S^*\| = \|(R-S)^*\| = \|(R-S)\| < \delta = \varepsilon$$

ومنه فإن f مستمر.

(d) بما أن $\|T\| = \|T^*\|$ فإن: $\|T^*T\| \le \|T^*\|.\|T\| = \|T\|^2$

ومن جهة أخرى :

$$\|Tx\|^2 = (Tx,Tx) = (T^*Tx,x) \le \|T^*Tx\|\|x\|$$
$$\le \|T^*T\|.\|x\|^2$$

وبالتالي $\|T\|^2 \le \|T^*T\|$ وبذلك يتم المطلوب.

تمرين محلول (١١):

بفرض أن K, H فضاءي هيلبرت عقديين . $T \in B(H,K)$ عندئذ:

(a) $\ker T = (\operatorname{Im} T^*)^\perp$. درسها .

(b) $\ker T^* = (\operatorname{Im} T)^\perp$.

(c) $\ker T^* = \{0\}$ إذا وفقط إذا كان ImT في K.

الحل:

(a) إن $\ker T \subseteq (\operatorname{Im} T^*)^\perp$ وذلك لأنه من أجل $x \in \ker T$ و $z \in \operatorname{Im} T^*$. بما

أن $z \in \mathrm{Im}T^*$ فإنه يوجد $y \in k$ بحيث إن $T^*y = z$.

$$(x, z) = (x, T^*y) = (Tx, y) = 0$$

عندئذٍ $x \in (\mathrm{Im}T^*)^{\perp}$ وبالتالي $\ker T \subseteq (\mathrm{Im}T^*)^{\perp}$.

إن $(\mathrm{Im}T^*)^{\perp} \subseteq \ker T$ وذلك لأن:

من أجل $v \in (\mathrm{Im}T^*)^{\perp}$ فإن: $T^*Tv \in \mathrm{Im}T^*$ وبالتالي:

$$(Tv, Tv) = (v, T^*Tv) = 0$$

أي أن $Tv = 0$ وبالتالي فإن $v \in \ker T$.

وبذلك نكون قد برهنا أن $\ker T = (\mathrm{Im}T^*)^{\perp}$.

(b)
$$\ker T^* = (\mathrm{Im}(T^*)^*)^{\perp} = (\mathrm{Im}T)^{\perp}$$

(c) إذا كان $\ker T^* = \{0\}$ فإن:

$$((\mathrm{Im}T)^{\perp})^{\perp} = (\ker T^*)^{\perp} = \{0\}^{\perp} = k$$

وبالتالي فإن $\mathrm{Im}T$ كثيف في K.

$$\ker T^* = \mathrm{Im}T^{\perp} = \left(((\mathrm{Im}T)^{\perp})^{\perp}\right)^{\perp} = K^{\perp} = \{0\}$$

تمرين محلول (١٢) :

من أجل كل $k \in C[0,1]$. بفرض أن $T_k \in B(L_2[0,1])$ المعرف بالشكل:

$$(T_k g)(t) = k(t)\, g(t)$$

إذا كان $f \in C[0,1]$ عندئذٍ T_f مؤثر ناظمي .

الحل :

نعلم أن $(T_f)^* = T_{\bar{f}}$ (تمرين محلول ٨) وذلك من أجل كل $g \in L^2[0,1]$ ويكون :

$$\left(T_f (T_f)^*\right)(g) = T_f\left(T_{\bar{f}}(g)\right) = T_f(\bar{f} g) = f \bar{f} g$$

$$\left((T_f)^* T_f\right)(g) = T_{\bar{f}}\left(T_f(g)\right) = T_{\bar{f}}(f g) = \bar{f} f g = f \bar{f} g$$

وبالتالي: $T_f (T_f)^* = (T_f)^* T_f$

تمرين محلول (١٣):

بفرض أن $S \in B(\ell_2)$ المعرف بالشكل :

$$S(x_1,x_2,x_3,.....)=(0,x_1,x_2,x_3,.....)$$

أثبت أن S ليس ناظمياً.

الحل :

نعلم أنه من أجل كل $\{y_n\} \in \ell_2$

$$S^*(y_1,y_2,.....)=(y_2,y_3,y_4,.....)$$

من أجل $\{x_n\} \in \ell^2$.

$$S^*\left(S(x_1,x_2,x_3,.....)\right)=S^*(0,x_1,x_2,x_3,.....)=(x_1,x_2,x_3,.....)$$

$$S\left(S^*(x_1,x_2,x_3,.....)\right)=S(x_2,x_3,.....)=(0,x_2,x_3,.....)$$

وبذلك : $$S^*\left(S(x_1,x_2,x_3,.....)\right)\neq S\left(S^*(0,x_1,x_2,x_3,.....)\right)$$

وذلك من أجل كل $\{x_n\} \in \ell_2$ وبالتالي S ليس ناظمياً.

تمرين محلول (١٤):

إذا كان H فضاء هيلبرت العقدي . I مؤثر المطابقة على H , $T \in B(H), \lambda \in \mathbb{C}$ مؤثر ناظمي عندئذٍ $T-\lambda I$ مؤثر ناظمي.

الحل:

$$(T-\lambda I)^*=T^*-\bar{\lambda}I$$

نعلم أن: $T^*T=TT^*$

$$(T-\lambda I)(T-\lambda I)^*=(T-\lambda I)\left(T^*-\lambda I\right)$$

$$=TT^*-\lambda T^*-\bar{\lambda}I-\lambda\bar{\lambda}I$$

$$=T^*T-\lambda T^*-\bar{\lambda}I-\lambda\bar{\lambda}I$$

$$=(T^*-\bar{\lambda}T^*)(T-\lambda I)$$

$$=(T-\lambda I)^*(T-\lambda I)$$

وبالتالي فإن $T-\lambda I$ مؤثر ناظمي .

تمرين محلول (١٥) :

بفرض أن H فضاء هيلبرت العقدي . $T \in B(H)$ أثبت أن:

(a) $T^*T \,,\, TT^*$ مترافقين ذاتياً.

(b) إذا كان $T = R + iS$ فإن $R \,,\, S$ مترافقان ذاتياً.

الحل:

(a) $(T^*T)^* = T^*T^{**} = T^*T$ وبالتالي T^*T مترافق ذاتياً.

$$(T^*T)^* = T^{**}T^* = TT^*$$

(b) بفرض أن $R = \frac{1}{2}(T + T^*)$, $S = \frac{1}{2i}(T - T^*)$ عندئذ: $T = R + iS$

كما أن :

$$R^* = \frac{1}{2}(T + T^*)^* = \frac{1}{2}(T^* + T) = R$$

وبالتالي R مترافق ذاتياً.

$$S^* = \frac{-1}{2i}(T - T^*)^* = \frac{-1}{2i}(T^* - T^{**}) = \frac{1}{2i}(T - T^*) = S$$

وبالتالي S مترافق ذاتياً.

تمرين محلول (١٦) :

لنستعرض في الفضاء $L_2[0,1]$ المؤثّر :

$$y(t) = Ax = \int_0^1 K(t,s)x(s)ds$$

حيث إن $K(t,s)$ نواة مستمرّة . أوجد A^* .

الحل :

لدينا :

$$\left(A^*g, x\right) = \left(g, Ax\right) = \left(g, \int_0^1 K(t,s)x(s)ds\right)$$

وبالتالي فإنّ و بحسب تعريف الجداء الداخلي في الفضاء $L_2[0,1]$:

$$\int_0^1 A^* g(t)x(t)dt = \int_0^1 g(t)\left[\int_0^1 K(t,s)x(s)ds\right]dt$$

$$\int_0^1 A^* g(t)x(t)\, dt = \int_0^1\left[\int_0^1 K(t,s).g(t)dt\right]x(s)ds$$

$$\int_0^1 A^* g(t)x(t)\, dt = \int_0^1\left[\int_0^1 K(s,t).g(s)\, dt\right]x(t)dt$$

وبالتالي فإنّ:

$$A^* g(t) = \int_0^1 K(s,t).g(s)\, ds$$

من هنا نجد أنّ الانتقال إلى المؤثّر المرافق في هذا التمرين يعني تبديل موضعي المتغيرين في النواة . (تسمّى النواة $K(s,t)$ بمنقول النواة $K(t,s)$) .

تمرين محلول (١٧) :

ليكن لدينا المؤثر :

$$A : C[0,\infty[\to C[0,\infty[$$
$$Ax(t) = t\ x(t)$$

أثبت أنّ المؤثّر A خطي وغير محدود و لكنّه مغلق .

البرهان :

إنّ A خطي لأنّ :

$$\forall x_1(t), x_2(t) \in C[0,\infty[\quad \& \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$$A\left(\lambda x_1(t) + \mu x_2(t)\right) = t\left(\lambda x_1(t) + \mu x_2(t)\right) = \lambda t\, x_1(t) + \mu t\, x_2(t)$$
$$= \lambda A\, x_1(t) + \mu A\, x_2(t)$$

و بالتالي فإنّ A خطي .

إنّ A غير محدود لأنّه لو أخذنا المتتالية $x_n(t) = \dfrac{n}{n+t}$ فإنّ :

$$\|x_n\| = \sup_{t\in[0,\infty[} \frac{n}{n+t} = 1$$

$$\|A\, x_n\| = \sup_{t\in[0,\infty[} \frac{nt}{n+t} = n$$

و ذلك لأنّ : $\left(\frac{nt}{n+t}\right)' = \frac{n^2}{(n+t)^2} \geq 0$ متزايد دوماً لذلك فإنّ :

$$\sup_{t\in[0,\infty[} \frac{nt}{n+t} = \lim_{t\to\infty} \frac{nt}{n+t} = n$$

$$\|A\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax_n\| = \sup_{\|x\|\leq 1} n = \infty$$ نظيم المؤثر

وبالتالي فإنّ A غير محدود . إنّ A مغلق لأنّه لو أخذنا :

$$x_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} x(t)$$

$$Ax_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} y(t)$$

وبالتالي يكون :

$$x_n(t) + Ax_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} x(t) + y(t)$$

$$(1+t)x_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} x(t) + y(t)$$

$$x_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{x(t)+y(t)}{(1+t)}$$

ولكن لدينا بحسب الفرض أن : $x_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} x(t)$ و هذا يعطينا أنّ :

$$x(t) = \frac{x(t)+y(t)}{(1+t)} \quad \Rightarrow \quad y(t) = t\,x(t) = Ax(t)$$

وحيث إن $x \in D_A$ واعتماداً على تعريف المؤثر المغلق يكون A مغلقاً .

تمارين غير محلولة (الفصل الخامس)

١- إذا كان جداء مؤثرين خطيين موجوداً فأثبت أن ناتج الجداء هو مؤثر خطي.

٢- من أجل أي التوابع $a(x)$ مؤثر الجداء بـ $a(x)$ يكون مؤثراً مستمراً من الفضاء $L_p[0,1]$ في الفضاء $L_q[0,1]$؟ .

٣- بين أن المؤثر $T:\ell_\infty \longrightarrow \ell_\infty$ المعرف بالدستور $T x = (\eta_i) = y$ حيث:

$\eta_i = \frac{\xi_i}{i}$ و $x = (\xi_i)$ هو مؤثر خطي ومحدود.

٤- إذا كان X و Y فضاءين خطيين منظمين و $T:X \longrightarrow Y$ مؤثراً خطياً مستمراً عندئذٍ $\ker(T)$ مجموعة مغلقة.

٥- ليكن T و S مؤثرين خطيين كل منهما متباين وغامر بحيث $T:X \longrightarrow Y$ و $S:Y \longrightarrow Z$ حيث X,Y,Z فضاءات خطية، أثبت أن المؤثر العكسي $(ST)^{-1}$ للجداء ST موجود وأن :

$$(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}$$

٦- ليكن المؤثر $T:C[0,1] \longrightarrow C[0,1]$ معطى بالشكل: $y(t) = \int_0^1 x(\tau)d\tau$

حدِّد كلاً من $R(T)$ و T^{-1} (حيث $T^{-1}:R(T) \to C[0,1]$) ثم بين فيما إذا كان T^{-1} خطياً ومحدوداً.

٧- من أجل $h \in C[0,1]$، وبفرض أن $T_h \in B\left(L^2[0,1]\right)$ معرف بالشكل:

$$(T_h g)(t) = h(t)\, g(t)$$

إذا كان $f \in C[0,1]$ المعرف بالعلاقة $f(t) = t$، عندئذٍ T_f لا يملك معكوس.

٨- إذا كانت T_n و S_n من الفضاء $L_B(E_1,E_2)$ وكانت المتتاليتان $\{S_n\}$ و $\{T_n\}$ متقاربتين بقوة من النهايتين S و T على الترتيب. أثبت أن $\{S_n + T_n\}$ متقاربة بقوة من النهاية $S + T$.

٩- ليكن $L_B(B_1,E)\ni T_n$ (حيث B_1 فضاء باناخ و E فضاء خطي منظم) فإذا كانت المتتالية $\{T_n\}$ متقاربة بقوة فبين أن المتتالية $\{\|T_n\|\}$ محدودة.

١٠- بيّن بأن التقارب المنتظم $T_n \xrightarrow[n\to\infty]{} T$ حيث $L_B(E_1,E_2)\ni T_n$ يقتضي التقارب القوي كما أن النهاية واحدة.

١١- بيّن بأن التقارب القوي في $L_B(E_1,E_2)$ يقتضي التقارب الضعيف كما أن النهاية تكون واحدة.

١٢- لتكن المتتالية $\{A_n\}$ من $L_B(E_1,E_2)$ (E_1 و E_2 فضاءين خطيين منظمين) متقاربة (بحسب مفهوم التقارب بالنظيم) من المؤثر $L_B(E_1,E_2)\ni A$ ولتكن $\{B_n\}$ متتالية من $L_B(E_3,E_1)$ حيث E_3 فضاء خطي منظم متقارب من المؤثر $L_B(E_3,E_1)\ni B$، عندئذٍ أثبت أن المتتالية $\{A_n B_n\}$ متقاربة من المؤثر AB حسب مفهوم التقارب بالنظيم.

١٣- بفرض أن X , Y فضاءا باناخ و $T\in B(X,Y)$ تطبيق من X إلى Y وبفرض أن :

$$L=\{T(x): x\in X\ ;\ \|x\|\le 1\}$$

حيث $\overline{L}$ لصاقة L ، والمطلوب :

(a) يوجد $r>0$ بحيث إن $\{y\in Y : \|y\|\le r\}\subseteq \overline{L}$

(b) $\left\{y\in Y : \|y\|\le \frac{r}{2}\right\}\subseteq L$

(c) إذا كان T تقابلاً عندئذٍ يوجد $S\in B(X,Y)$ بحيث إن :

$$T\circ S=I_y\ ,\ S\circ T=I_x$$

١٤- أثبت صحة العلاقات التالية:

$I_1)$ $(\alpha A+\beta B)^*=\overline{\alpha}A^*+\overline{\beta}B^*\ ;\ \alpha,\beta\in\mathbb{C}$

$I_2)$ $(A+B)^*=B^*A^*$

$I_3)$ $(A^*)^*=A$

$I_4)$ $I^*=I$

I- المؤثر الواحدي).

حيث A و B مؤثرات خطية محدودة على فضاء إقليدي .

١٥- ليكن $A:E_1 \longrightarrow E_2$ (E_1 و E_2 فضاءين خطيين منظمين)، حيث A مؤثر مستمر على كل E_1. هل يوجد دائماً عنصر $x \in E_1$, $x \neq 0$ بحيث:

$$\|Ax\| = \|A\|\|x\|$$

١٦- بفرض أن H فضاء هيلبرت عقدي وليكن $T \in B(H)$. عندئذٍ العلاقات الآتية متكافئة :

(a) T له معكوس.

(b) $\ker T^* = \{0\}$ ويوجد $a > 0$ بحيث إن $\|T(x)\| \geq \alpha \|x\|$ وذلك من أجل كل $x \in H$.

١٧- ليكن $K(x,y)$ تابعاً مستمراً على المربع الواحدي من $\mathbb{R}^2$ وليكن A مؤثر من $L_p[0,1]$ في $L_q[0,1]$ ($1 \leq p$, $q < \infty$) معطى بالعلاقة:

$$(Af)(x) = \int_0^1 K(x,y) f(y) dy$$

أوجد المؤثر المرافق A^* حيث إن:

$$A^* : L_{q^*}[0,1] \longrightarrow L_{p^*}[0,1]$$

وأن :

$$q^* = \frac{q}{q-1} \text{ و } p^* = \frac{p}{p-1} \text{ .}$$

١٨- أثبت أنه في الفضاءات المنظمة غير المنتهية المؤثر المتراص لا يملك مؤثراً عكسياً محدوداً.

١٩- بفرض أن H فضاء هيلبرت العقدي ، وليكن $T \in B(H)$ مؤثر ناظمي وبفرض $a > 0$. أثبت أن :

(a) $\|T(x)\| = \|T^*(x)\|$; $\forall x \in H$

(b) إذا كان $\|x\| \geq \|T(x)\|$ من أجل كل $x \in H$ عندئذٍ فإن $\ker T^* = \{0\}$.

٢٠– بفرض أن H فضاء هيلبرت العقدي، وليكن V , $T \in B(H)$ أثبت أن:

(a) $TT^* = I$ إذا وفقط إذا كان T إيزومترياً.

(b) V وحدي إذا وفقط إذا كان V إيزومترياً من H إلى H.

٢١– بفرض أن H فضاء هيلبرت العقدي وليكن $T \in B(H)$.

(a) أثبت أن $\ker T = \ker(T^*T)$.

(b) أثبت أن $\overline{(\operatorname{Im} T^*)} = \overline{\operatorname{Im}(T^*T)}$.

٢٢– في الفضاء الحقيقي ℓ_p $(1 \leq p \leq \infty)$ لنعرف المؤثر A بالشكل:

$$A\{x_n\} = \{a_n x_n\} \quad ; \{x_n\} \in \ell_p$$

حيث $\{a_n\}$ متتالية محدودة مثبتة من الأعداد الحقيقية.

أثبت أن المؤثر A متراص إذا وفقط إذا كان: $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$

٢٣– أثبت أن المؤثر A المعرف بالشكل: $Af(x) = x.f(x)$

ليس متراصاً في الفضاء $C[0,1]$.

٢٤– ليكن B_1 و B_2 فضاءي باناخ وليكن المؤثر $A \in L_B(B_1, B_2)$، أثبت أنه إذا كان المؤثر المرافق A^* متراصاً عندئذٍ يكون A مؤثراً متراصاً.

٢٥– ليكن المؤثر A معرفاً على الفضاء $L_p(0,\infty)$ $(1 < p)$ ومعطى بالعلاقة:

$$Af(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$$

أثبت أن المؤثر A محدود ولكنه غير متراص، ثم أوجد نظيم المؤثر A (أي $\|A\|$).